EPFL 2023-2024 **Nom :** ______________________

GC BA6 **Prénom :** ______________________

Examen – Mécanique des milieux continus : partie pratique.

Notes et livre du cours autorisés

2h, 24 points ($\frac{2}{3}$ de la note de l'examen écrit)

Indication : Aucun des exercices ne nécessite de calculs lourds

Exercice 1 : ***Essai oedométrique avec gravité, 12 points***

On considère un bloc cylindrique de section circulaire de surface A, et de hauteur H dans la direction z (voir figure 1). Il est placé dans un conteneur indéformable de même géométrie. Le contact entre le conteneur et le bloc est sans frottement et sans détachement.

Un piston indéformable, astreint à coulisser dans le conteneur, est en contact sans frottement et sans détachement avec la partie supérieure du bloc. st vrai. Mais est bonne faire l'assuntion qui il n'y a pas de detachment sinon la formule qu'ils obtienent ne s Le bloc est constitué d'un matériau élastique linéaire isotrope homogène, de caractéristiques ρ, λ, μ et on appelle $E^* = \lambda + 2\mu$. Le piston est soumis à un déplacement vertical $(-\delta \boldsymbol{e_z})$. Pour commencer on néglige les effets de la gravité. On propose comme solution à

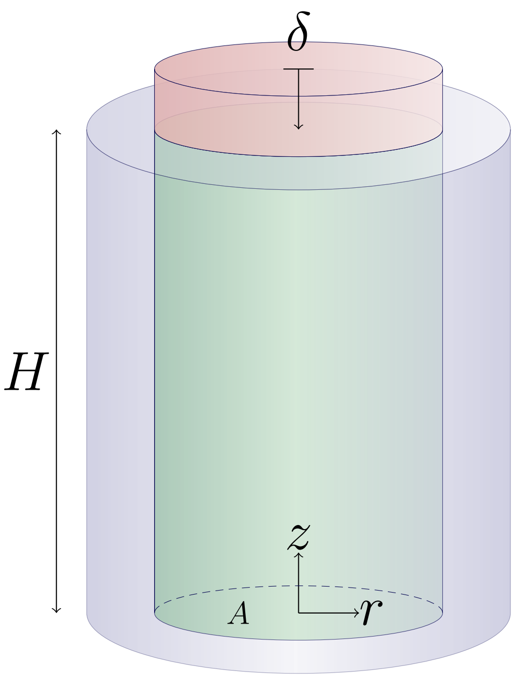

Figure 1 – Le bloc cylindrique de section constante A et de hauteur H est confiné par une paroi rigide (bleu) de même rayon que le cylindre non déformé (vert). Le piston (rouge) est déplacé rigidement de δ dans la direction des z négatif.

ce problème le champ de déplacement :

$$\boldsymbol{u}(r, \theta, z) = u(z)\boldsymbol{e}_z = \left(a\frac{z^2}{H^2} + b\frac{z}{H} \right) \boldsymbol{e}_z \tag{1}$$

(1) Trouver la relation entre a et b pour que les conditions aux limites soient satisfaites. (1 point)

(2) Calculer le tenseur des déformations (1 point)

(3) Montrer que l'énergie élastique totale U_{tot} est : (2,5 points)

$$U_{tot} = \frac{AE^* \left(3\delta^2 + a^2\right)}{6H}.$$

(4) Le système étant en déplacement contrôlé, le travail des forces extérieures est nul et l'énergie potentielle est donc égale à l'énergie élastique. Trouver les paramètres du champ de déplacement qui minimisent cette énergie potentielle. Auriez-vous pu intuiter ce champ de déplacement ? Pourquoi ? La solution trouvée est-elle exacte ? Commenter brièvement sans calcul (1,5 points)

On prend maintenant en compte l'effet de la gravité qui agit dans la direction des z négatifs. Le piston subit toujours le même déplacement δ. On garde le champ de déplacement défini à l'équation 1.

(5) Montrer que le travail W exercé par le champ gravitationnel est : (1 point)

$$W = A\rho g H \left(-\frac{a}{3} - \frac{b}{2}\right)$$

(6) Minimiser l'énergie potentielle totale pour trouver les nouvelles valeurs de a et b. Commenter votre solution. (1,5 points)

(7) Calculer la pression exercée par la paroi. Quelle condition doit satisfaire δ pour éviter que le cylindre se détache de la paroi (c'est-à-dire pour avoir $p > 0$) ? (2 points)

(8) Donner l'expression de la contrainte tangentielle maximale. La calculer pour les points à $z = 0$ et dessiner le cercle de Mohr pour ces points. Pourquoi la calcule-t-on à $z = 0$? (1,5 points)

Exercice 2 : *Disque intervertébral, 8 points*

Le disque intervertébral humain est un vaisseau à paroi épaisse. L'image en figure 2 montre sa composition en couches fibreuses stratifiées avec un noyau gélatineux (nucleus pulposis). La paroi structurelle stratifiée est attachée aux vertèbres adjacentes. On peut estimer approximativement les contraintes générées dans l'anneau par le rapprochement des vertèbres et la compression du disque.

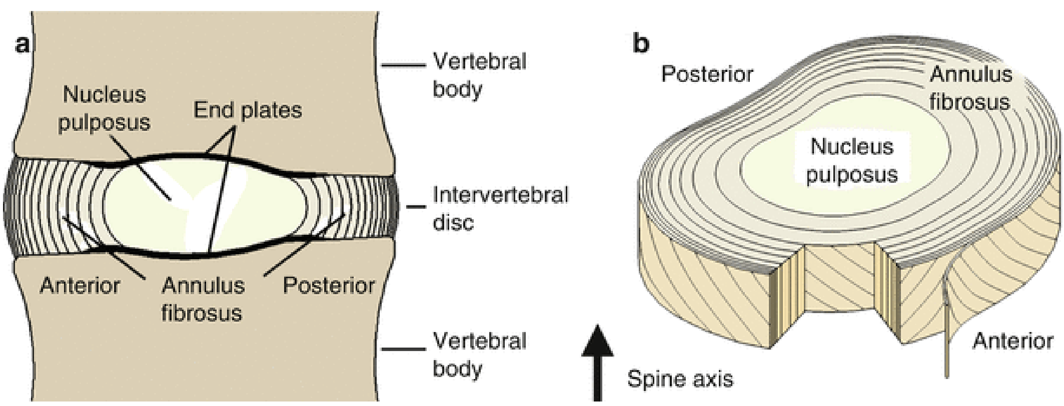

FIGURE 2 – Disque intervertébral

Modélisons le disque comme un anneau isotrope linéaire élastique (E, ν) rempli d'un fluide incompressible (figure 3). Lorsque la charge F est transmise d'une vertèbre à l'autre, une partie de la charge est transmise par la pression P dans le fluide et une autre partie par une contrainte axiale σ_{zz} appliquée à l'anneau. Supposons que le disque soit uniformément comprimé. On considère également que $u_r << 1$ et $\varepsilon_{zz} << 1$.

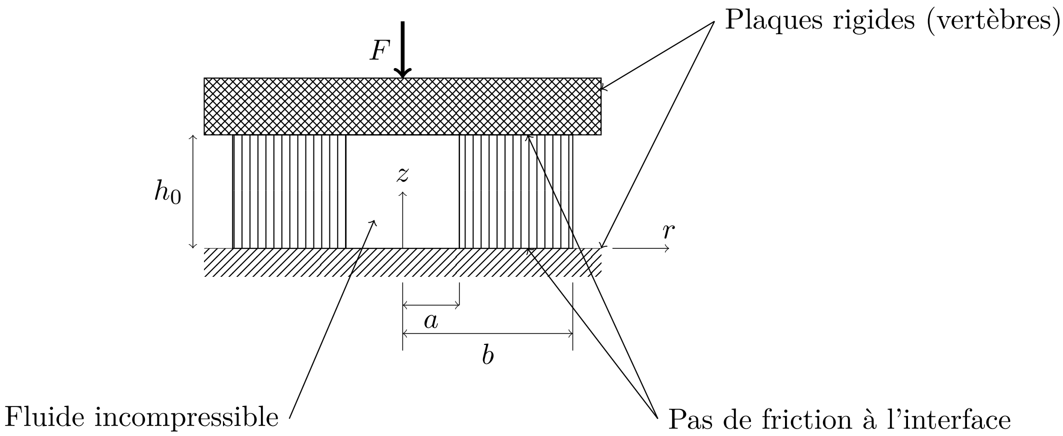

FIGURE 3 – Géométrie du problème.

(1) Les contraintes en tout point de l'anneau sont similaires à celles d'un tube à paroi épaisse, soumis à une pression interne et une contrainte uniaxiale en z. En coordonnées cylindriques, on donne :

$$\sigma_{rr} = \frac{a^2 P}{b^2 - a^2}(1 - \frac{b^2}{r^2})$$
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{a^2 P}{b^2 - a^2}(1 + \frac{b^2}{r^2})$$
$$\sigma_{zz} = \text{cst}$$

Les autres composantes sont nulles.
Calculer les contraintes sur la paroi de l'anneau en contact avec le fluide. Commenter le résultat. (1 point)

(2) Donner le tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$. (1.5 points)

(3) Donner le champ de déplacement $\underline{u}$ de l'anneau. En coordonnées cylindriques, la relation entre déplacement et déformation est la suivante :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$
$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$$
$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Les constantes d'intégration sont supposées nulles. (1.5 points)

(4) En supposant que le fluide est incompressible, donner la relation entre $u_r(a)$ et $u_z(h_0)$. Sachant que $u_r << 1$ et $\varepsilon_{zz} << 1$, on négligera les termes d'ordre ≥ 2. (1.5 points)

(5) En utilisant la relation trouvé dans la question précédente, et en remplaçant $u_r(a)$ et $u_z(h_0)$ par l'évaluation de $\underline{u}$ en a et h_0, on peut trouver la relation liant la pression du fluide P à la contrainte σ_{zz} de l'anneau suivante :

$$\sigma_{zz}\left(\frac{2\nu - 1}{2}\right) = P\left(\frac{\gamma^2 + 1}{\gamma^2 - 1} - \frac{\nu}{\gamma^2 - 1} + \nu\right)$$

A partir de cette formule, trouver le rapport entre la force reprise par le fluide F_{fluide} et celle reprise par l'anneau F_{anneau}, en fonction de $\gamma = b/a$. (1.5 points)

(6) Pour quelle condition sur $\gamma = b/a$ a-t-on une surface de contact entre fluide et vertèbre égale à celle entre anneau et vertèbre. Que vaut le rapport F_{fluide}/F_{anneau} dans ce cas là ? (1 point)

Exercice 3 : ***Corps soumis à une pression externe, 4 points***

On cherche à trouver le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ dans un solide soumis à une pression externe uniforme sur sa surface S_2 (figure 4 gauche). On considère que l'on connait déjà le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma_1}$ de ce même solide lorsqu'il est soumis à une pression interne uniforme sur sa surface S_1 (figure 4 droite). On cherche à résoudre ce problème à l'aide d'une simple superposition.

Trouver le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$. Représenter schématiquement votre raisonnement et expliquer le principe utilisé.

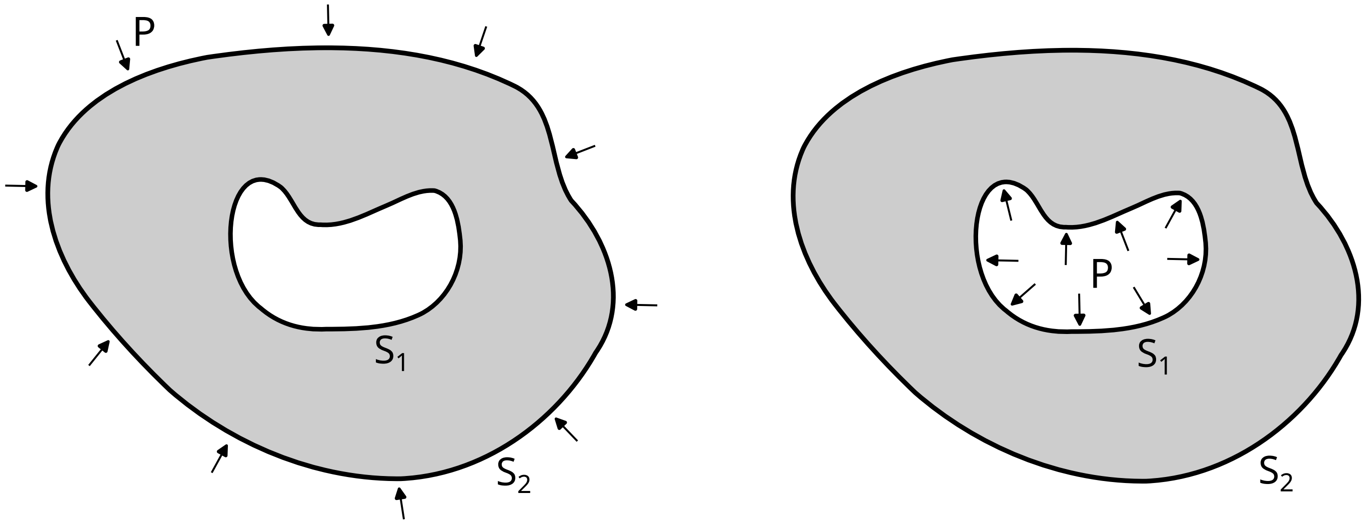

FIGURE 4 – **Gauche :** corps soumis à une pression externe (problème à résoudre). **Droite :** corps soumis à une pression interne (problème dont on connait la solution).